

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет Вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК

/ Соколов И.А. /

2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)
Наименование дисциплины (модуля):

Межфакультетский курс «Вероятностные модели случайных явлений и процессов»

код и наименование дисциплины (модуля)

Уровень высшего образования:

бакалавриат, магистратура, специалитет

указывается: бакалавриат, магистратура или специалитет

Направление подготовки (специальность):

(код и название направления/специальности)

Направленность (профиль) ОПОП:

(если дисциплина (модуль) относится к вариативной части программы)

Форма обучения:

Очная с использованием дистанционных образовательных технологий

очная, очно-заочная, заочная

Рабочая программа рассмотрена и одобрена

На заседании кафедры математической статистики

факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

(протокол № 2, 18.01.2023)

Москва 2023

1. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП: реализуется в рамках МФК.
2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия: не требуются.
3. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников (коды)	Индикаторы (показатели) достижения компетенций	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), сопряженные с компетенциями
Новая УК ОС МГУ Способен осуществлять коммуникацию, поиск, обработку и анализ данных с применением цифровых инструментов, в том числе с элементами программирования и технологий искусственного интеллекта.	<p>УК-N (Ин.1ук) Знает основные понятия и методы теории вероятностей, принципы построения базовых вероятностных моделей и условия их адекватности</p> <p>УК-N (Ин.2ук) Умеет применять вероятностные модели для решения задач, связанных с анализом данных, в том числе с использованием технологий искусственного интеллекта и машинного обучения</p> <p>УК-N (Ин.3ук) Владеет методами построения вероятностных моделей для решения профессиональных задач, в том числе с применением технологий искусственного интеллекта</p>	<p>Знать: Основные понятия современной теории вероятностей Основные подходы к построению вероятностных моделей статистических закономерностей в реальных данных Особенности основных эмпирических, асимптотических и энтропийных моделей закономерностей в реальных данных и условия их адекватности</p> <p>Уметь Применять вероятностные модели для решения практических задач, связанных с анализом реальных данных, в том числе с использованием технологий искусственного интеллекта и машинного обучения</p> <p>Владеть: методами построения вероятностных моделей для решения профессиональных задач</p>

4. Объем дисциплины (модуля) 1 з.е., в том числе 24 академических часа на контактную работу обучающихся с преподавателем, 12 академических часа на самостоятельную работу обучающихся.
5. Формат обучения асинхронное обучение с использованием *дистанционных образовательных технологий*
6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических или астрономических часов и виды учебных занятий

1. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП: реализуется в рамках МФК.
2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия: не требуются.
3. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников (коды)	Индикаторы (показатели) достижения компетенций	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), сопряженные с компетенциями
Новая УК ОС МГУ Способен осуществлять коммуникацию, поиск, обработку и анализ данных с применением цифровых инструментов, в том числе с элементами программирования и технологий искусственного интеллекта.	УК-Н (Ин.1ук) Знает основные понятия и методы теории вероятностей, принципы построения базовых вероятностных моделей и условия их адекватности	Знать: Основные понятия современной теории вероятностей Основные подходы к построению вероятностных моделей статистических закономерностей в реальных данных Особенности основных эмпирических, асимптотических и энтропийных моделей закономерностей в реальных данных и условия их адекватности Уметь Применять вероятностные модели для решения практических задач, связанных с анализом реальных данных, в том числе с использованием технологий искусственного интеллекта и машинного обучения Владеть: методами построения вероятностных моделей для решения профессиональных задач
	УК-Н (Ин.2ук) Умеет применять вероятностные модели для решения задач, связанных с анализом данных, в том числе с использованием технологий искусственного интеллекта и машинного обучения	
	УК-Н (Ин.3ук) Владеет методами построения вероятностных моделей для решения профессиональных задач, в том числе с применением технологий искусственного интеллекта	

4. Объем дисциплины (модуля) 0.5 з.е., в том числе 0 академических часов на контактную работу обучающихся с преподавателем, 18 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.
5. Формат обучения асинхронное обучение с использованием *дистанционных образовательных технологий*
6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических или астрономических часов и виды учебных занятий

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе						
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) <i>Виды контактной работы, часы*</i>				Самостоятельная работа обучающегося <i>Виды самостоятельной работы, часы</i>		
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Всего	Работа в среде электронного обучения	Всего
Тема 1. Понятие вероятностной модели. Математические модели характеристик случайных величин.	6	4				4	2	2
Тема 2. Основные предельные теоремы теории вероятностей. Схема испытаний Бернулли.	6	4				4	2	2
Тема 3. Математические модели информации и неопределенности. Энтропия и ее свойства. Пуассоновский процесс как идеальная модель дискретного хаоса	9	6				6	3	3
Тема 4. Случайные суммы. Предельные теоремы для случайных сумм. Процессы Кокса	6	4				4	2	2
Тема 5. Смеси вероятностных распределений, их свойства и применение к моделированию финансовых данных	9	6				6	3	3
Итого:	36	24				24	12	12

* Текущий контроль успеваемости может быть реализован в рамках занятий семинарского типа, групповых или индивидуальных консультаций

** Практическая подготовка (при наличии) осуществляется на базе ... (указать – структурное подразделение МГУ или организацию (предприятие), практическая подготовка на базе которого осуществляется на основании Договора)

*** Часы на проведение промежуточной аттестации выделяются из часов самостоятельной работы обучающегося.

7. Фонд оценочных средств для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю)	СРЕДСТВА ОЦЕНИВАНИЯ	ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю)			
		<i>Шкалы и критерии оценивания могут быть сформулированы как общие для всех дисциплин (модулей) и размещены в документе «Оценочные и методические материалы для контроля формирования компетенций у обучающихся в процессе освоения образовательной программы», входящем в состав ОПОП</i>			
		2 (не зачтено)	3 (зачтено)	4 (зачтено)	5 (зачтено)
Знать:					
Основные понятия современной теории вероятностей	Тестирование	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Основные подходы к построению вероятностных моделей статистических закономерностей в реальных данных	Тестирование	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Особенности основных эмпирических, асимптотических и энтропийных моделей закономерностей в реальных данных и условия их адекватности	Тестирование	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Свойства нестандартных (смешанных) вероятностных моделей	Тестирование	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Уметь:					
Исследовать свойства основных	Тестирование	Отсутствие	Фрагментарные	Общие, но не	Сформированные

вероятностных моделей		знаний	знания	структурированные знания	систематические знания
Применять вероятностные модели для решения практических задач, связанных с анализом реальных данных, в том числе с использованием технологий искусственного интеллекта и машинного обучения	Тестирование	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Владеть:					
методами построения вероятностных моделей для решения профессиональных задач, в том числе с применением технологий искусственного интеллекта	Тестирование	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания

Типовые задания и иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

Примерные тестовые задания

1. Предложить решение парадокса Бертрана, в котором ответом является число, отличное от $1/2$, $1/3$ и $1/4$.
2. Пациент проходит обследование на предмет наличия у него некоторого редкого заболевания. Известно, что результат иногда (но довольно редко) бывает ошибочным. Результат обследования показывает наличие у него этой болезни. Стоит ли пациенту отчаиваться? Почему?
3. В конце 90-х годов некоторые эксперты министерства просвещения в качестве аргументации "за" введение ЕГЭ приводили следующие доводы: при "обкатке" комплекта заданий, содержащего 50 задач, результаты его выполнения двумя тысячами учеников хорошо согласовались с нормальным распределением". Что они имели в виду? (Как можно понять эту аргументацию?) Корректна ли эта аргументация? Каким должно быть распределение числа правильно решенных задач?
4. Покупатель хочет приобрести, скажем, помидоры на рынке. Продавец взвешивает товар. Весы продавца показывают, скажем, X килограммов. Пусть a – реальный вес товара. Тогда $X=a+\epsilon$, где ϵ – случайная погрешность весов. Какое распределение можно предложить в качестве модели истинного распределения погрешности? Почему? Отдельно рассмотреть ситуации, в которых продавец честен или нечестен.

5. В чем заключается принцип неубывания неопределенности в сложных (в том числе биологических или социальных) замкнутых системах? Привести математическую аргументацию.
6. Дана независимая однородная выборка X_1, \dots, X_n . Как на практике проверить, существует ли математическое ожидание случайной величины X_1^k , k – фиксированное число, $-\infty < k < +\infty$, $k \neq 0$?
7. Коэффициент корреляции случайных величин X и Y равен нулю. Можно ли утверждать, что величины X и Y не связаны никакой функциональной зависимостью?
8. Предположим, что некий человек на перемещение из точки a в точку b затрачивает усилия, равные $|b-a|$. Это означает, что его затраты на перемещение пропорциональны длине пути. Скажем, мы рассматриваем делового человека, для которого фактор времени имеет решающее значение и который может перемещаться в любую точку с постоянной скоростью. Пусть X – случайная величина, характеризующая координату точки, куда необходимо переместиться этому человеку. Спрашивается: где должен жить этот человек, чтобы минимизировать свои ожидаемые усилия, связанные с перемещениями?
9. В странах западной Европы наблюдается следующая закономерность: коэффициент корреляции между числом гнезд аистов в районе и рождаемостью в этом же районе близок к 0.9. Служит ли это подтверждением того, что детей приносят аисты? Предложите разумное объяснение наблюдаемой закономерности.
10. На примере таблиц логарифмов, нормального распределения или каких-либо других (на выбор) проверить справедливость закона Бенфорда.
11. Можно ли центральную предельную теорему использовать для характеристики скорости сходимости в законе больших чисел?
12. Можно ли схему испытаний Бернулли считать дискретным аналогом пуассоновского процесса? Почему?

Вопросы для самопроверки

1. Вероятностные модели и парадокс Бертрана.
2. Математическая модель центра случайной величины.
3. Математическая модель разброса случайной величины.
4. Случайные величины. Зависимость событий и случайных величин.
5. Виды сходимости случайных величин. Центральная предельная теорема, оценка скорости сходимости в ЦПТ.

6. Закон больших чисел, оценка скорости сходимости в ЗБЧ.
7. Распределение Пуассона, теорема Пуассона и ее обобщение.
8. Устойчивые и безгранично делимые распределения. Теоремы Леви и Хинчина.
9. Информация и энтропия. Их свойства.
10. Дифференциальная энтропия, свойства некоторых распределений.
11. Определение пуассоновского процесса.
12. Информационные свойства пуассоновского процесса.
13. Случайные суммы, основные свойства, пуассоновские случайные суммы.
14. Геометрические случайные суммы, теорема Реньи, связь между геометрическими и пуассоновскими случайными суммами.
15. Теорема переноса. Аналог теоремы Пуассона для случайных сумм.
16. Смеси вероятностных распределений, идентифицируемость, примеры.
17. Обобщения пуассоновского процесса, дважды стохастический пуассоновский процесс.
18. Обобщенный процесс Кокса. ЦПТ и ЗБЧ для обобщенных процессов Кокса.
19. Острове́ршинность масштабных смесей нормальных законов.
20. Устойчивость нормальных смесей относительно смешивающего распределения: прямая задача.
21. Устойчивость нормальных смесей относительно смешивающего распределения: обратная задача.
22. Моделирование распределений приращений финансовых индексов смесями нормальных законов.

Примеры билетов для зачета.

1

1. Предложить решение парадокса Бертрана, в котором ответом является число, отличное от $1/2$, $1/3$ и $1/4$.
2. В конце 90-х годов некоторые эксперты министерства просвещения в качестве аргументации "за" введение ЕГЭ приводили следующие доводы: при "обкатке" комплекта заданий, содержащего 50 задач, результаты его выполнения двумя тысячами учеников хорошо согласовались с нормальным распределением". Что они имели в виду? (Как можно понять эту аргументацию?) Корректна ли эта аргументация? Каким должно быть распределение числа правильно решенных задач?

2

1. В последовательности испытаний Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании p , $0 < p < 1$, последнее испытание закончилось успехом. Этому испытанию предшествовали 99 успехов подряд. Какова вероятность того, что при продолжении испытаний в серии из 10 испытаний все испытания закончатся успехом?
2. Покупатель хочет приобрести, скажем, помидоры на рынке. Продавец взвешивает товар. Весы продавца показывают, скажем, X килограммов. Пусть a – реальный вес товара. Тогда $X = a + \varepsilon$, где ε – случайная погрешность весов. Какое распределение можно предложить в

качестве модели истинного распределения погрешности? Почему? Отдельно рассмотреть ситуации, в которых продавец честен или нечестен.

3

1. В чем заключается принцип неубывания неопределенности в сложных (в том числе биологических или социальных) замкнутых системах? Привести математическую аргументацию.
2. Дана независимая однородная выборка X_1, \dots, X_n . Как на практике проверить, существует ли математическое ожидание случайной величины X_1^k , k – фиксированное число, $-\infty < k < +\infty$, $k \neq 0$?

4

1. Коэффициент корреляции случайных величин X и Y равен нулю. Можно ли утверждать, что величины X и Y не связаны никакой функциональной зависимостью?
2. Проводятся два эксперимента: в одном наблюдается значение случайной величины X , принимающей значения 1, 2, 3, 4 и 5 с вероятностями соответственно 0.1, 0.2, 0.3, 0.2 и 0.2, в другом эксперименте наблюдается значение случайной величины Y , принимающей значения 1, 2, 3, 4 и 5 с вероятностями соответственно 0.1, 0.2, 0.3, 0.3 и 0.1. Неопределенность какого из двух экспериментов выше?

5

1. Предположим, что некий человек на перемещение из точки a в точку b затрачивает усилия, равные $|b-a|$. Это означает, что его затраты на перемещение пропорциональны длине пути. Скажем, мы рассматриваем делового человека, для которого фактор времени имеет решающее значение и который может перемещаться в любую точку с постоянной скоростью. Пусть X – случайная величина, характеризующая координату точки, куда необходимо переместиться этому человеку. Спрашивается: где должен жить этот человек, чтобы минимизировать свои ожидаемые усилия, связанные с перемещениями?
2. Можно ли центральную предельную теорему использовать для характеристики скорости сходимости в законе больших чисел?

8. Ресурсное обеспечение:

- Перечень основной и дополнительной учебной литературы

Основная учебно-методическая литература

1. Королев В.Ю., Шестаков О.В. Вероятностные модели. Учебное пособие. - М: МАКС Пресс, 2020 - 268 с.
2. В.Ю. Королев. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Проспект, 2006 - 160 с.

Дополнительная литература

1. В.Ю. Королев. Вероятностно-статистические методы декомпозиции волатильности хаотических процессов. М.: Изд-во МГУ. 2011.

2. В.Ю. Королев, В.Е. Бенинг, С.Я. Шоргин. Математические основы теории риска. М.: Физматлит. 2007.
3. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир. 1984.
4. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1990.
5. В.М. Золотарев. Современная теория суммирования случайных величин. – М.: Наука, 1986.
6. В.В. Gnedenko, V. Yu. Korolev. Random Summation: Limit Theorems and Applications. – Boca Raton, FL: CRC Press, 1996.
 - Перечень лицензионного программного обеспечения
 - Перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем
 - Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости)
 - Описание материально-технической базы.

9. Язык преподавания.

Русский

10. Преподаватели:

зав. кафедрой математической статистики факультета ВМК МГУ д.ф.-м.н., профессор **Королев Виктор Юрьевич**;
профессор кафедры математической статистики факультета ВМК МГУ д.ф.-м.н., **Шестаков Олег Владимирович**

11. Разработчики программы:

зав. кафедрой математической статистики факультета ВМК МГУ д.ф.-м.н., профессор **Королев Виктор Юрьевич**;
профессор кафедры математической статистики факультета ВМК МГУ д.ф.-м.н., **Шестаков Олег Владимирович**